Examen - Convocatoria Ordinaria

[**3 horas**]

- **No está permitido utilizar (ni acceder a) ningún tipo de documentación.**

1. Se define $Z(t)$ como el proceso
$$Z(t) = B(t) - t\,B(1), \quad t \in [0,1]$$
con $B(t)$ siendo un proceso Browniano estándar.
   a) Calcular la función de media $\mu(t)$, con $0 \leq t \leq 1$.
   b) Calcular la función de autocovarianza, $\mathbb{C}\mathrm{ov}_Z(s,t)$, cuando $0 \leq s \leq t \leq 1$.
   c) Escribir la variable $Z(t)$ y el vector $(Z(t), Z(t+s))$, con $0 \leq t+s \leq 1$, como combinación linear de variables normales estándar independientes. Interpretar este resultado.

(2 Puntos)

2. Una empresa quiere usar un sistema par incentivar la mejora profesional de su personal ofreciendo cursos de formación. Un empleado tendrá que cursar un curso de formación (estado 1) y una vez acabado el curso recibirá, en el año siguiente, una recompensa (estado 2). Luego, por un año más, el empleado no recibirá ninguna formación (estado 3), y al terminar de este año o continuará con apuntarse a otro curso de formación o dejará el plan de formación (estado 4). La recompensa para cada curso es de 1500€.
La matriz de transición para este modelo está dada por
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 70\,\% & 30\,\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 75\,\% & 0 & 0 & 25\,\% \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
El trabajador empieza en el periodo 0 en el estado 1.
   a) Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos

   y calcular:
   b) la distribución estacionaria,
   c) el número medio de años que el empleado recibirá el premio antes de acabar el plan de formación y el valor medio de su recompensa total.
   d) la distribución de $X(2)$, su media y su varianza.

(3 Puntos)

3. Se considere la cadena de Markov en tiempo continuo con estados $\{1,2,3\}$, vector de tasas de cambios $q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y matriz de transición de la cadena incrustada
$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Asumiendo que empiece en el estado 1 calcular la distribución de $X(0.1)$.
   b) Asumiendo que empiece con distribución inicial $(1/2, 1/2, 0)$, calcular la probabilidad que $X(0.1) = 2$.
   c) Calcular la distribución estacionaria.

(2 Puntos)

4. Se considere el juego de un jugador que en cada jugada tiene probabilidad 20 % de ganar y 80 % de perder 2 monedas. Llamando S_n el número de monedas que el jugador tiene en el tiempo $n \geq 1$, se tiene que $S_n = 6 + \sum_{1 \leq k \leq n} X_k$, con X_k la cuantía ganada o, bien, perdida en la jugada $k > 0$. El juego se acaba cuando el jugador se queda sin monedas o cuando llegue a tener 10 monedas:
   a) Muestra que el proceso $W_n = 2^{S_n}$ es una martingala.
   b) Define el tiempo de parada T que indica el momento en el que se acaba el juego.
   c) Calcula la función de probabilidad de S_T
   d) Calcula la varianza de S_T.

(3 Puntos)